УДК 519.6

О.М. Литвин, Ю.І. Першина
Українська інженерно-педагогічна академія МОНМС України, м. Харків
Україна, 61003, м. Харків, вул. Університетська, 16

Математичне моделювання процесів, розривних на лініях триангуляції

O.N. Lytvyn, Y.I. Pershina
Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy MESYS of Ukraine, c. Kharkov
Ukraine, 61003, c. Kharkov, Universitetskaya st., 16

Mathematical Modelling of Processes Discontinuous on Triangulation Lines

О.Н. Литвин, Ю.И. Першина
Украинская инженерно-педагогическая академия МОНМС Украины, г. Харьков
Украина, 61003, г. Харьков, ул.Университетская, 16

Математическое моделирование процессов, разрывных на линиях триангуляции

У статті побудована математична модель розривного процесу, що описується функцією двох змінних, у вигляді розривного інтерполяційного лінійного сплайна. Причому функція має можливі розриви на лініях триангуляції довільними трикутниками. Побудовані розривні конструкції включають в себе, як частинний випадок, класичні неперервні сплайни.
Ключові слова: розривний процес, розривна інтерполяція, триангуляція довільними трикутниками.

In the article, the mathematical model of discontinuous process which is described by function of two variables, in the form of discontinuous interpolational linear spline is constructed. The function has possible ruptures on triangulation lines by any triangles. As a special case, the constructed discontinuous designs include classical continuous splines.
Key words: discontinuous process, discontinuous interpolation, triangulation by any triangles.

В статье построена математическая модель разрывного процесса, который описывается функцией двух переменных, в виде разрывного интерполяционного линейного сплайна. Причем функция имеет возможные разрывы на линиях триангуляции произвольными треугольниками. Построенные разрывные конструкции включают в себя, как частный случай, классические непрерывные сплайны.
Ключевые слова: разрывный процесс, разрывная интерполяция, триангуляция произвольными треугольниками.

Вступ

Задача наближення розривних функцій є однією з найскладніших задач обчислювальної математики. Спеціалістам з обчислювальної математики добре відомі оператори наближення неперервних та диференційовних функцій за допомогою поліномів та сплайнів [1], [2]. Відомі також праці з наближення неперервних функцій однієї змінної кусково-сталими функціями [3], [4], в яких неперервні та диференційовані функції наближуються сплайнами степеня нуль. В роботі [5] була розглянута апроксимація розривних розв’язків (функцій однієї змінної) диференціальних рівнянь за допомогою розривного методу Гальоркіна. А в роботі [6] розглядається розривний метод Гальоркіна

для еліптичної крайової задачі з використанням двовимірних неузгоджених сіток. Цей метод дозволяє враховувати неконформність елементів. Причому метод забезпечує неперервність розв'язку, хоча від базисних функцій узгодженості не вимагає.

Таким чином, у вказаних роботах досліджувалося наближення неперервних функцій за допомогою неперервних та розривних сплайнів або розривних функцій за допомогою неперервних. Але загальної теорії таких наближень не існує. В даній роботі ми пропонуємо таку загальну теорію побудови розривних сплайнів, множина яких як частинний випадок включає множину неперервних сплайнів, що можуть мати розриви першого роду в заданих точках або на заданій множині ліній – границь елементів.

Задачі наближення розривних функцій виникають частіше, ніж задачі наближення неперервних функцій. Наприклад, в методах комп'ютерної томографії на даний час недостатньо вивчене питання про використання інформації про внутрішню структуру тіла людини (різні органи мають свою форму та щільність тканин).

Тобто актуальною є розробка та дослідження теорії наближення розривних функцій за допомогою розривних функцій.

Авторами вже досліджувалися питання наближення розривних функцій розривними сплайнами з використанням елементів, що мають хоча б один прямий кут. В роботі [7] був запропонований метод наближення розривних функцій двох змінних розривними інтерполяційними білінійними сплайнами, а в роботі [8] – інтерлінаційними розривними сплайнами на ректангульованій області визначення. Були також побудовані розривні інтерлінаційні сплайни для наближення функцій двох змінних, область визначення яких розбивається на прямокутні трикутники [9].

Дана стаття присвячена побудові та дослідженню інтерполяційних розривних сплайнів для наближення розривних функцій з областю визначення, що триангулюється довільними трикутниками.

Метою даної роботи є модифікація запропонованого методу сегментації символів у напрямку збільшення його якісних показників в умовах перспективних спотворень зображень номерних знаків та їх часткового затінення.

Постановка задачі

Нехай в області $D=[0;1]^2$ розривний процес описується розривною функцією $f(x,y)$. Нехай D розбита на n довільних трикутників, та інформація про функцію задана у вигляді значень функції $f(x,y)$ у вузлах трикутників області D. Функція $f(x,y)$ має розриви першого роду на границях між цими трикутниками (не обов'язково між всіма). Метою роботи є побудова та дослідження математичної моделі розривного процесу, що описується розривною функцією $f(x,y)$, у вигляді оператора розривної лінійної сплайн-інтерполяції.

Побудова математичної моделі розривного процесу

Розглянемо довільний трикутник $\mathrm{T}_i,\ i=\overline{1,n}$ з вузлами $A_i^{(k)}(x_i^{(k)},y_i^{(k)}),\ i=\overline{1,n},$ $k=\overline{1,3}$ (рис. 1). Вважаємо, що на кожній із сторін заданого трикутника функція $f(x,y)$ може мати (а може і не мати) розриви першого роду, причому у вершинах трикутника функція набуває значень

$$C_i^{(k)}=\lim_{\substack{(x,y)\to A_i^{(k)}\\(x,y)\in\mathrm{T}_i}} f(x,y),\ i=\overline{1,n},\ k=1,2,3\cdot$$

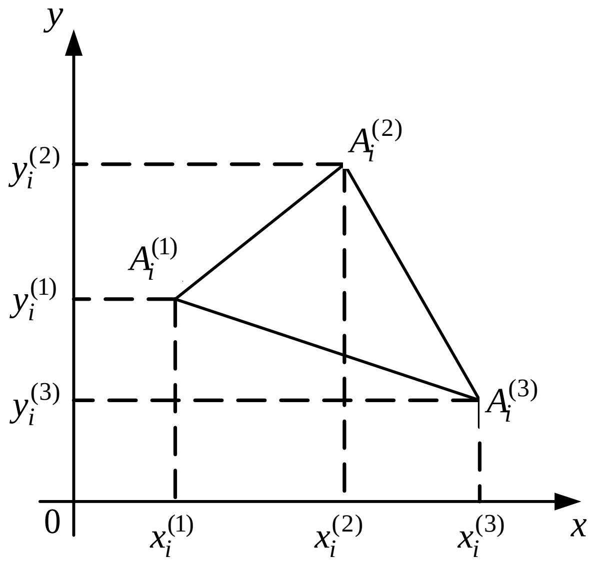


Рисунок 1 – Зображення довільного трикутника з триангульованої області визначення розривної функції $f(x,y)$

Визначення. Будемо називати розривним інтерполяційним лінійним поліноміальним сплайном в області $\mathrm{T}_i \subset D$, $i=\overline{1,n}$ наступну функцію

$$s_i\,(x,y) = C_i^{(1)}\,\frac{\omega_i^{(3)}(x,y)}{\omega_i^{(3)}\left(A_i^{(1)}\right)} + C_i^{(2)}\,\frac{\omega_i^{(2)}(x,y)}{\omega_i^{(2)}\left(A_i^{(2)}\right)} + C_i^{(3)}\,\frac{\omega_i^{(1)}(x,y)}{\omega_i^{(1)}\left(A_i^{(3)}\right)},\ (x,y)\in \mathrm{T}_i\,, \qquad (1)$$

де

$$\omega_i^{(1)}(x,y) = y - y_i^{(1)} - \frac{(x-x_i^{(1)})(y_i^{(2)}-y_i^{(1)})}{x_i^{(2)}-x_i^{(1)}};$$

$$\omega_i^{(2)}(x,y) = y - y_i^{(1)} - \frac{(x-x_i^{(1)})(y_i^{(3)}-y_i^{(1)})}{x_i^{(3)}-x_i^{(1)}};$$

$$\omega_i^{(3)}(x,y) = y - y_i^{(2)} - \frac{(x-x_i^{(2)})(y_i^{(3)}-y_i^{(2)})}{x_i^{(3)}-x_i^{(2)}}.$$

Теорема 1. Функція $S(x,y)=s_i\,(x,y),\ (x,y)\in \mathrm{T}_i \subset D$ задовольняє інтерполяційним властивостям

$$\lim_{\substack{(x,y)\to A_i^{(k)}\\ (x,y)\in \mathrm{T}_i}} s_i(x,y) = C_i^{(k)},\ \ i=\overline{1,n},\ k=1,2,3\,.$$

Доведення. Перевіримо твердження теореми для $k=1$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to A_i^{(1)}\\ (x,y)\in \mathrm{T}_i}} s_i(x,y) = \lim_{\substack{x\to x_i^{(1)}\\ y\to y_i^{(1)}\\ (x,y)\in \mathrm{T}_i}} s_i(x,y) =$$

$$= C_i^{(1)}\,\frac{\omega_i^{(3)}(x_i^{(1)},y_i^{(1)})}{\omega_i^{(3)}\left(A_i^{(1)}\right)} + C_i^{(2)}\,\frac{\omega_i^{(2)}(x_i^{(1)},y_i^{(1)})}{\omega_i^{(2)}\left(A_i^{(2)}\right)} + C_i^{(3)}\,\frac{\omega_i^{(3)}(x_i^{(1)},y_i^{(1)})}{\omega_i^{(1)}\left(A_i^{(3)}\right)} =$$

$$= C_i^{(1)}\,\frac{\omega_i^{(3)}(x_i^{(1)},y_i^{(1)})}{\omega_i^{(3)}\left(A_i^{(1)}\right)} + C_i^{(2)}\,\frac{\omega_i^{(2)}(x_i^{(1)},y_i^{(1)})}{\omega_i^{(2)}\left(A_i^{(2)}\right)} + C_i^{(3)}\,\frac{\omega_i^{(1)}(x_i^{(1)},y_i^{(1)})}{\omega_i^{(1)}\left(A_i^{(3)}\right)} =$$

$$= C_i^{(1)} + C_i^{(2)} \left(y_i^{(1)} - y_i^{(1)} - \frac{(x_i^{(1)} - x_i^{(1)})(y_i^{(3)} - y_i^{(1)})}{x_i^{(3)} - x_i^{(1)}} \right) \frac{1}{\omega_i^{(2)}\left(A_i^{(2)}\right)} +$$

$$+ C_i^{(3)} \left(y_i^{(1)} - y_i^{(1)} - \frac{(x_i^{(1)} - x_i^{(1)})(y_i^{(2)} - y_i^{(1)})}{x_i^{(2)} - x_i^{(1)}} \right) \frac{1}{\omega_i^{(1)}\left(A_i^{(3)}\right)} = C_i^{(1)}.$$

Теорема доведена.

Наведемо оцінку похибки наближення функції лінійним інтерполяційним сплайном, яка наведена в роботі Суботіна [10].

Нехай $\xi = \{\xi_1, \xi_2\} \in R^2$, $\|\xi\| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} = 1$, $D_\xi f(x,y) = \xi_1 \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \xi_2 \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ – похідна за напрямком ξ.

Теорема 2. Нехай $f(x,y) \in M_2$, $M_2 = \{ f(x,y) : D_\xi f(x,y)$ – неперервні в D та $\left| D_\xi f(u) - D_\xi f(v) \right| \le M \|u - v\|$, $\forall u = (u_1, u_2) \in D,\ \forall v = (v_1, v_2) \in D,\ \forall \xi \}$ наближується оператором $S(x,y) = s_i(x,y),\ (x,y) \in \mathrm{T}_i \subset D$, тоді для оцінки похибки наближення в кожному трикутному елементі розбиття справедлива нерівність:

$$\left| f(x,y) - S(x,y) \right| \le \frac{1}{6} M h^2,$$

де h – найбільша із сторін трикутника.

Теорема 3. Якщо $C_i^{(k)} = f\left(A_i^{(k)}\right),\ k = \overline{1,3},\ i = \overline{1,n}$, то в кожному трикутнику T_i, $i = \overline{1,n}$, оператор (1) точно відновлює всі лінійні функції.

Доведення випливає з того, що через три точки можна провести тільки одну площину.

Зауваження 1. Якщо значення функції у вузлах одного трикутника збігаються зі значеннями функції в цих же вузлах зі сторони сусідніх трикутників, то оператор (1) є класичним неперервним лінійним інтерполяційним сплайном.

Зауваження 2. Якщо значення функції у вузлах трикутної сітки невідомі, то для знаходження невідомих коефіцієнтів $C_i^{(k)}$, $k = 1,2,3$, $i = \overline{1,n}$ в даній роботі пропонується використовувати метод найменших квадратів, згідно з яким всі невідомі знаходяться з умови

$$J_i(C) = \sum_{\mathrm{T}_i \subset D} \iint_{\mathrm{T}_i} \left[f(x,y) - s_i(x,y,C) \right]^2 dxdy \to \min_C . \qquad (2)$$

І тоді отримаємо апроксимаційний розривний лінійний сплайн.

Оператор (1) з коефіцієнтами, визначеними формулою (2), являє собою математичну модель процесу, що має розриви на лініях триангуляції області визначення функції двох змінних, яка і описує згаданий процес.

Приклад. Нехай задані вузли триангуляції одиничного квадрата $D = [0;1]^2$.

$$X1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.3 \\ 0.6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ Y1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.7 \\ 0.4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ X2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.3 \\ 0.6 \\ 1 \\ 0.6 \\ 0.3 \end{pmatrix},\ Y1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.7 \\ 0.4 \\ 1 \\ 0.4 \\ 0.7 \end{pmatrix},\ X3 = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0.6 \end{pmatrix},\ Y3 = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0.4 \end{pmatrix}.$$

Тобто одиничний квадрат розбито на 6 довільних трикутників (рис. 2а)

$$T_1 = \left\{(x,y)\in D: 0<x<0,3;\ \frac{7}{3}x<y<1-x\right\};$$

$$T_2 = \left\{(x,y)\in D: 1-y<x<0,3+\frac{7}{3}(y-0,7);\ 0.7<y<1\right\};$$

$$T_3 = \left\{(x,y)\in D: 0,3<x<0,6; 1-x<y<0,7+\frac{3}{7}(x-0,3)\right\}\cup$$

$$\cup\left\{(x,y)\in D: 0,6\le x<1;\ 0,4+\frac{3}{2}(x-0,6)<y<0,7+\frac{3}{7}(x-0,3)\right\};$$

$$T_4 = \left\{(x,y)\in D: 0,6<x<1; 1-x<y<0,4+\frac{3}{2}(x-0,6)\right\};$$

$$T_5 = \left\{(x,y)\in D: \frac{3}{2}y<x<1-y; 0<y<0,4\right\};$$

$$T_6 = \left\{(x,y)\in D: 0<x<0,3; \frac{2}{3}x<y<\frac{3}{7}x\right\}\cup\left\{(x,y)\in D: 0,3\le x<0,7; \frac{2}{3}x<y<1-x\right\}.$$

Нехай в області D задана розривна функція $f(x,y)$, яка має розриви на лініях заданої триангуляції, але не на всіх (рис. 2б).

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<0,6;\ \frac{2}{3}x<y<1-x\\ x, & 0,7<y<1;\ 0,3+\frac{7}{3}(y-0,7)\\ 3-x, & 0,3<x<1;\ 1-x<y<0,7+\frac{3}{7}(x-0,3)\\ -2x^2+2, & 0<y<0.4;\ \frac{3}{2}y<x<1-y\end{cases}.$$

Функція $f(x,y)$ має розриви першого роду у вузлах заданої трикутної сітки та в них має такі значення:

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in T_1}} f(x,y)=1;$ $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in T_6}} f(x,y)=1;$ $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in T_5}} f(x,y)=2;$

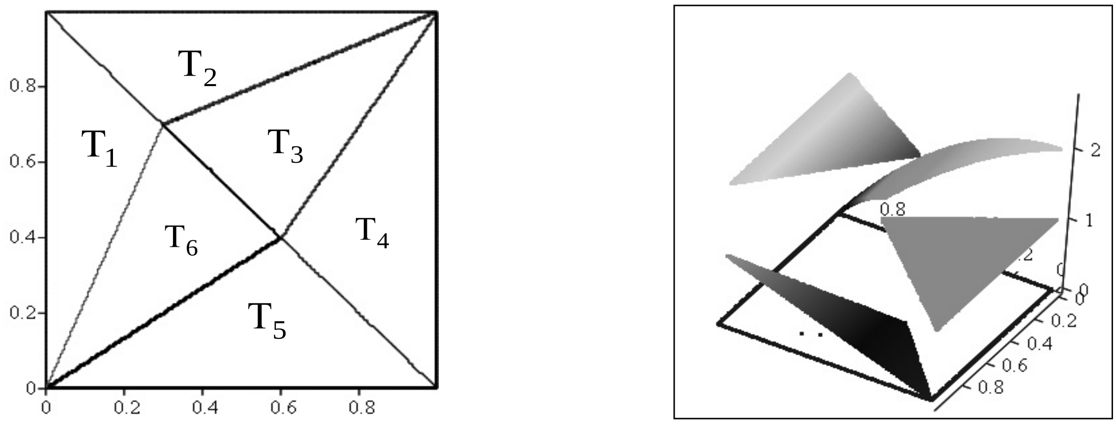
$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\(x,y)\in T_1}} f(x,y)=1;$ $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\(x,y)\in T_2}} f(x,y)=0;$ $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0.3,0.7)\\(x,y)\in T_1}} f(x,y)=1;$

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0.3,0.7)\\(x,y)\in T_2}} f(x,y)=0.3;$ $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0.3,0.7)\\(x,y)\in T_3}} f(x,y)=2.7$ $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0.3,0.7)\\(x,y)\in T_6}} f(x,y)=1;$

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0.6,0.4)\\(x,y)\in T_6}} f(x,y)=1;$ $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0.6,0.4)\\(x,y)\in T_3}} f(x,y)=2.4$ $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0.4,0.6)\\(x,y)\in T_4}} f(x,y)=2.4;$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0.4,0.6)\\(x,y)\in T_5}} f(x,y)=1,68; \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\(x,y)\in T_2}} f(x,y)=1; \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\(x,y)\in T_3}} f(x,y)=2;$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\(x,y)\in T_4}} f(x,y)=2; \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\(x,y)\in T_4}} f(x,y)=2; \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\(x,y)\in T_5}} f(x,y)=0\,.$$

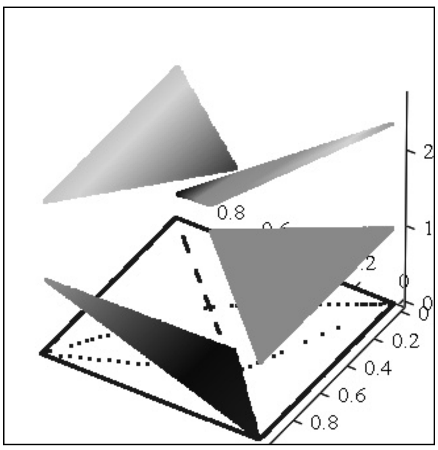


а) б)

Рисунок 2 – а) триангуляція області визначення функції $f(x,y)$; б) графічний вигляд наближуваної функції $f(x,y)$

В кожному трикутному елементі побудуємо інтерполяційний сплайн $S(x,y)$ у вигляді формули (1). Після знаходження за формулою (2) невідомих коефіцієнтів, отримаємо сплайн вигляду (рис. 3).

$$S(x,y)=\begin{cases} 1, & 0<x<0,6;\ \dfrac{2}{3}x<y<1-x \\ x, & 0,7<y<1;\ 0,3+\dfrac{7}{3}(y-0,7) \\ 3-x, & 0,3<x<1;\ 1-x<y<0,7+\dfrac{3}{7}(x-0,3) \\ -2.1x+0.5y+2.4, & 0<y<0.4;\ \dfrac{3}{2}y<x<1-y \end{cases}$$



ss

Рисунок 3 – Побудований наближуючий розривний сплайн

Побудований розривний сплайн точно наближує ту частину функції, де вона є постійною або лінійною, що і підтверджує викладену вище теорію.

Висновки

У роботі запропонована математична модель розривного процесу у вигляді розривного інтерполяційного лінійного сплайну. Вважається, що розривний процес описується функцією двох змінних з розривами першого роду на лініях триангуляції довільними трикутниками. Метод, побудований авторами, припускає, що розриви наближуваної функції відомі, і тому вони збігаються з розривами наближуючого сплайна. Наступним кроком планується розробити методи наближення розривних функцій розривними сплайнами, коли розриви наближуваної функції ще треба знайти. А також планується застосувати розроблену теорію наближення розривних функцій розривними сплайнами до розв'язання двовимірної задачі комп'ютерної томографії.

Література

1. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения / Корнейчук Н.П. – М. : Наука, 1984. – 352 с.
2. Стечкин С.Б. Сплайны в вычислительной математике / С.Б. Стечкин, Ю.Н. Субботин. – М. : Наука, 1976. – 248 с.
3. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций / Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. – М. : Наука, 1980. – 352 с.
4. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування / Литвин О.М. – Х. : Основа, 2002. – 504 с.
5. Литвин О.М. Наближення розривної функції за допомогою розривних сплайнів / О.М. Литвин, Ю.І. Першина // Математичне та комп'ютерне моделювання. – Кам'янець-Подільський, 2010. – Вип. 3. – С. 122-131.
6. Литвин О.М. Побудова кусково-білінійних сплайнів для наближення функцій з розривами першого роду у вузлах ректангуляції двовимірної області / О.М. Литвин, Ю.І. Першина // Таврічний вісник інформатики та математики. – 2011. – № 1. – С. 63-72.
7. Литвин О.Н. Приближение разрывной функции двух переменных с помощью разрывных сплайнов двух переменных (прямоугольные элементы) / О.Н. Литвин, Ю.И. Першина // Компьютерная математика. – 2011. – № 1. – С. 96-105.
8. Литвин О.М. Приближение разрывных функций двух переменных с разрывами первого рода на линиях триангуляции двумерной области / О.М. Литвин, Ю.І. Першина // Управляющие системы и машины. – 2011. – № 5. – С. 34-47.
9. Литвин О.М. Наближення розривних функцій двох змінних розривними сплайн-інтерлінантами з використанням трапецевидних елементів / О.М. Литвин, Ю.І. Першина // Таврічний вісник інформатики та математики. – 2011. – № 2. – С. 59-70.
10. Субботин Ю.Н. Зависимость оценок многомерной кусочно-полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции / Ю.Н. Субботин // Труды Математического института АН СССР. – 1989. – Т. 189. – С. 117-137.

Literatura

1. Kornejchuk N.P. Splajny v teorii priblizhenija. M.: Nauka, 1984. 352 s.
2. Stechkin S.B.. Splajny v vychislitel'noj matematike. M.: Nauka. 1976. 248s.
3. Zav'jalov Ju.S. Metody splajn-funkcij. M.: Nauk. 1980. 352s.
4. Lytvyn O.M. Interlinacija funkcij ta dejaki ii zastosuvannja. H.: Osnova. 2002. 504s.
5. Lytvyn O.M. Matematichne ta komp'juterne modeljuvannja. Kam'janec'-Podil's'kyj. 2010. Vyp.3. S. 122-131.
6. Lytvyn O.M.. Tavrichnyj visnyk informatyky ta matematyky. Simferopol'. 2011. №1. S. 63-72.
7. Litvin O.N. Komp'juternaja matematika. Kiev. 2011. № 1. S. 96-105.
8. Lytvyn O.M. Upravljajushhie sistemy i mashiny. Kiev. 2011. №5. S. 34-47.
9. Lytvyn O.M. Tavrichnyj visnyk informatyky ta matematyky. Simferopol'. 2011. № 2. S. 59-70.
10. Subbotin Ju.N. Trudy Matematicheskogo institute. AN SSSR. 1989. T.189. S.117-137.

RESUME

O.N. Lytvyn, Y.I. Pershina

Mathematical Modelling of Processes, Discontinuous on Triangulation Lines

In article the problem of construction of mathematical model of discontinuous process which is described by discontinuous function of two variables is considered. It is supposed, that the function range of definition breaks into any triangles (not necessarily rectangular) which are not put each other, and their parties are not crossed. Also it is supposed, that function has possible ruptures of the first sort on lines between triangular elements.

The mathematical model is under construction in the form of discontinuous linear a spline-intepolation. In work the estimation of the constructed discontinuous design in each triangular element is resulted. In work conditions at which interpolational discontinuous spline is continuous are resulted, that is the general theory of approach of the set functions which special case is all the known theory of approach by classical continuous splines is developed. The example of approach of discontinuous function of two variables by constructed inerpolational discontinuous spline is resulted, and the received results of approach are analyzed.

Authors show, that discontinuous in some points or on some lines of function from two variables it is better to approach discontinuous splines. Thus, it is possible to receive equally appreciation of an error of approach in each element of splitting which are inherent in is continuous-differentiated splines.

Стаття надійшла до редакції 01.06.2012.